Задание № 1 Вариант № 11

Урок по теме: «производная функции»

Выполнила: И. Ю. Шишкина,

Понятие рассматривается по учебнику А. Г. Мордкович, П. В. Семенов Алгебра и начала математического анализа 10 класс Профильный уровень, - М.: Мнемозина, 2008 г., стр. 325

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и в некоторой её окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx, такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции** $y = f(x)$ **в точке** x **и обозначают** $f'(x)$**.**

Итак,
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

цели:

1. *Обучающая:* ввести определение понятия производной. Рассмотреть на задачах её физический и геометрический смыслы; сформулировать алгоритм (правило) вычисления производной функции в точке.
2. *Развивающая:* Развивать познавательный интерес у учащихся через раскрытие практической значимости применения производной. Развивать математическую речь.
3. *Воспитательная:* воспитание ответственного отношения к учебному труду, творческих способностей.

«…нет ни одной области в математике,

которая когда-либо не окажется применимой

к явлениям действительного мира…»

Н. И. Лобачевский

Подготовительный этап:

Так как понятия приращения функции и аргумента были введены на предыдущем уроке, то полезно их вспомнить.

Мотивационный этап:

На доске пока не записана тема урока.
Учитель: Сегодня на уроке мы познакомимся с таким математическим понятием, что:

1. Когда оно появилось, математика перешагнула из алгебры в математический анализ;
2. Ньютон назвал это "флюксией" и обозначал точкой;
3. Бывает первой, второй, третьей и...;
4. Обозначается штрихом.
5. Не только математики, но и химики, физики, экономисты жить без этого понятия не могут.

Так что же это?

Часто бывает так, что, решая задачи, очень далекие друг от друга по содержанию, мы приходим к одной и той же математической модели. Особенность математики состоит в том, что она разрабатывает способы оперирования с той или иной математической моделью, которыми потом пользуются в других областях знаний. Вы умеете работать со многими математическими моделями — уравнениями, неравенствами, системами уравнений, системами неравенств и др. На этом уроке речь пойдет о новой для вас математической модели. Сначала рассмотрим две различные задачи, физическую и геометрическую, процесс решения которых как раз и приводит к возникновению новой математической модели.
Рассмотрим следующую задачу:

Ориентировочный этап

Рассмотрим задачу. Пусть тело падает с большой высоты, причем расстояние, пройденное телом за время t, выражается формулой $s(x)=\frac{gt^2}{2}$, где $g=9{,}8 м/с^2$ - ускорение свободного падения. Найдем скорость тела в момент времени $t_0=10с$.
Решение:
1. Вспомним, как определяется скорость тела в момент времени $t_0=10с$.
2. Найдем среднюю скорость тела на промежутке от 10 с до 20 с, потом от 10 с до 15 с, от 10 с до 12 с, от 10 с до 11 с, на промежутке длиной 0,5 с, 0,25 с и т. д. Средней скоростью тела за время от 10 до t секунд называется величина $v_{ср}(t)=\frac{s(t)-s(10)}{t-10}$, равная отношению пройденного телом пути к времени, за которое этот путь пройден.
3. Запишем полученные средние скорости в таблицу:

Время от 10 до t, с	10	5	2	1	0,5	0,25	0,1	0,01
Средняя скорость за это время, в	10 g	12,5 g	11 g	10,5 g	10,25 g	10,125 g	10,05 g	10,005 g

м/с								

Мы получили последовательность скоростей, члены которой(как видно из таблицы) с уменьшением интервала времени, на котором мы рассчитываем среднюю скорость, все ближе и ближе к некоторому числу.

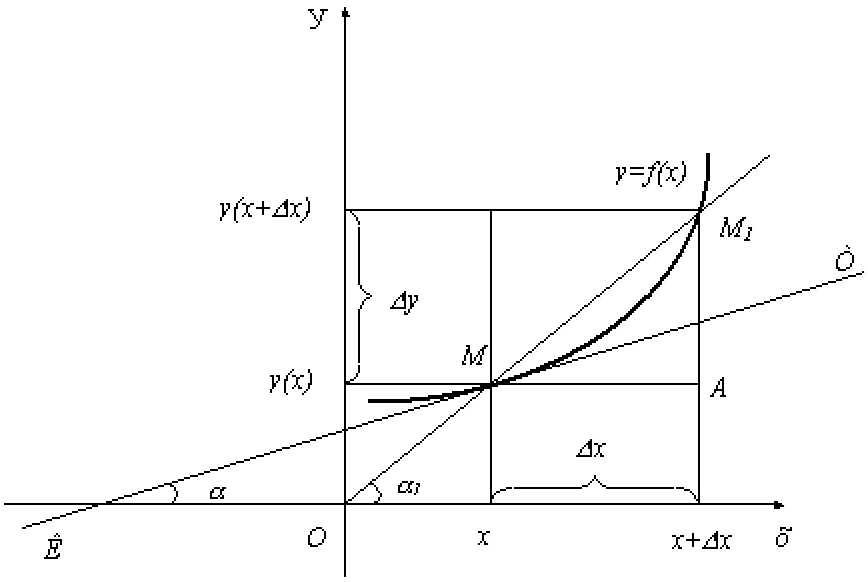
Это число называется *мгновенной скоростью* тела в момент времени $t_0 = 10c$. Найдем это число.

4. Запишем среднюю скорость на промежутке времени $[10;t]$:

$$v_{cp} = \frac{s(t)-s(10)}{t-10} = \frac{\frac{gt^2}{2} - \frac{g\cdot 10^2}{2}}{t-10} = \frac{g}{2}\cdot\frac{t^2-10}{t-10} = \frac{g}{2}\cdot(t+10)$$

Из этой формулы видно, что при приближении t к 10 значение v_{cp} будет стремиться к числу 10g. Таким образом, скорость тела в момент времени $t_0 = 10c$ равна 10g.

Аналогичные рассуждения можно применить для нахождения скорости любого другого процесса.
Например:



Если внимательно прочитать определение производной, то мы обнаружим, что в нем заложен алгоритм отыскания производной. Сформулируем его.

АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
(для функции $y = f(x)$)

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.

2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x+\Delta x$, найти $f(x+\Delta x)$.

3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример 1. *Найти производную постоянной функции y =C.*

Решение*. Воспользуемся алгоритмом отыскания производной.*
1) Для фиксированного значения x имеем: f (x) = C.
2) В точке $x+\Delta x$ имеем: $f(x+\Delta x) = C$.
3) $\Delta y = C - C = 0$.
4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$.
5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.
Ответ: $(C)' = 0$.

Пример 2. *Найти производную функции* $y = \frac{1}{x}$.
Решение. *Воспользуемся алгоритмом отыскания производной.*
1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы полагаем, что

$x \neq 0$) имеем: $f(x) = \frac{1}{x}$.

2) В точке $x+\Delta x$ имеем: $f(x+\Delta x) = \frac{1}{x+\Delta x}$.

3) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Истоические сведения:
Дифференциальное исчисление было создано ***Ньютоном и Лейбницем*** в конце 17 столетия на основе двух задач:
1) о разыскании касательной к произвольной линии
2) о разыскании скорости при произвольном законе движения
Еще раньше понятие производной встречалось в работах итальянского математика ***Тартальи*** (около 1500 - 1557 гг.) - здесь появилась касательная в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда.
В 17 веке на основе учения ***Г.Галилея*** о движении активно развивалась кинематическая концепция производной. Различные изложения стали встречаться в работах у ***Декарта***, французского математика ***Роберваля***, английского ученого ***Л. Грегори***. Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли ***Лопиталь, Бернулли, Лагранж, Эйлер, Гаусс.***

Практическое применение понятия «Производная функции»

Производная функции используется всюду, где есть неравномерное протекание процесса: это и неравномерное механическое движение, и переменный ток, и химические реакции и радиоактивный распад вещества и т.д., так как механический смысл производной это $v_{мгн.} = s'(t)\ a = s''(t) = v'(t)$

$v(t) = \dot{x}(t)$ – скорость
$a(t) = \dot{v}(t)$ – ускорение
$I(t) = \dot{q}(t)$ – сила тока
$C(t) = \dot{Q}(t)$ – теплоемкость
$d(l) = \dot{m}(l)$ – линейная плотность
$K(t) = \dot{U}(t)$ – коэффициент линейного расширения
$w(t) = \dot{\varphi}(t)$ – угловая скорость
$a(t) = \dot{w}(t)$ – угловое ускорение
$N(t) = \dot{A}(t)$ – мощность
$\Pi(t) = \dot{v}(t)$ – производительность труда, где $\dot{v}(t)$ – объем продукции
$I(t) = \dot{y}(t)$ – предельные издержки производства, где y – издержки производства в зависимости от объема выпускаемой продукции
$v(t) = \dot{C}(t)$ – скорость химической реакции

"Производная в химии"

Химия – это наука о веществах, о химических превращениях веществ.

Химия изучает закономерности протекания различных реакций.

Так как скорость реакции **w** непрерывно изменяется в ходе процесса, ее обычно выражают ***первой производной*** концентрации реагирующих веществ по времени.

Скорость химической реакции есть производная концентрации продуктов реакции.

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta C_{прод.}}{\Delta t} = C'_{прод.}$$

Концентрация продуктов реакции С прод. по ходу процесса увеличивается, поэтому перед производной ставится знак «плюс»

Или, по другому, скорость химической реакции есть производная концентрации исходных продуктов.

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta C_{исх.}}{\Delta t} = -C'_{исх.}$$

Концентрация исходного продукта Сисх. по ходу процесса уменьшается, поэтому перед производной ставится знак «минус»

Скорость реакции зависит от многих факторов: температуры, давления, наличия примесей, химической природы процесса.

При постоянной температуре в конкретной химической системе скорость реакции зависит только от концентрации реагирующих веществ.

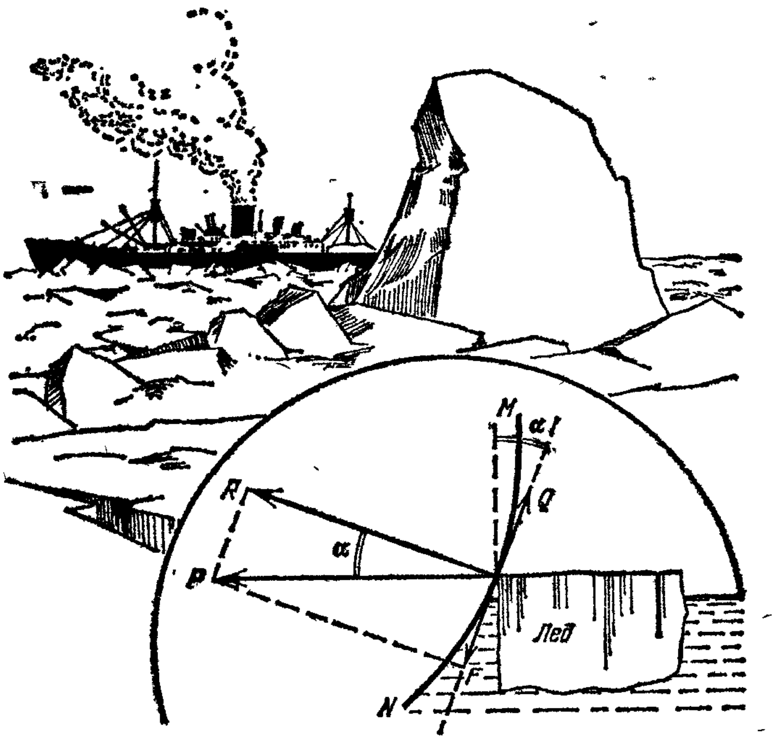
Одна из важнейших характеристик химических процессов – скорость реакции.

Скоростью химической реакции называется изменение концентрации реагирующих веществ в единицу времени.

И в химии нашло широкое применение дифференциальное исчисление для построения математических моделей химических реакций и последующего описания их свойств.

Дополнительная копилка интересных задач по данной теме, которые можно использовать на последующих уроках для реализации межпредметных связей.

№1
Пароход “Челюскин” в феврале 1934 года успешно прошел весь северный морской путь, но в Беринговом проливе оказался зажатым во льдах. Льды унесли “Челюскин” на север и раздавили.



Решение:
Сила P давления льда разлагается на две: F и R. R – перпендикулярна к борту, F – направлена по касательной. Угол между P и R – a – угол наклона борта к вертикали.
Q – сила трения льда о борт.
Q = 0,2 R (0,2 – коэффициент трения).
Если Q < F, то F увлекает напирающий лед под воду, лед не причиняет вреда, если Q > F, то трение мешает скольжению льдины, и лед может смять и продавить борт.
$0{,}2R < R \operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha > 0{,}2$
$Q < F$, если $\alpha > 11^0$.
Наклон бортов корабля к вертикали под углом $\alpha > 11^0$ обеспечивает безопасное плавание во льдах.

№2

Выбрать оптимальный объем производства фирмой, функция прибыли которой может быть смоделирована зависимостью:

$\pi(q) = R(q) - C(q) = q^2 - 8q + 10$

Решение:

$\pi'(q) = R'(q) - C'(q) = 2q - 8 = 0 \rightarrow q_{extr} = 4$

При $q < q_{extr} = 4 \rightarrow \pi'(q) < 0$ и прибыль убывает

При $q > q_{extr} = 4 \rightarrow \pi'(q) > 0$ и прибыль возрастает

При q = 4 прибыль принимает минимальное значение.

Каким же будет оптимальный объем выпуска для фирмы? Если фирма не может производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции ($p(q = 8) = p(q = 0) = 10$), то оптимальным решением будет вообще ничего не производить, а получать доход от сдачи в аренду помещений или оборудования. Если же фирма способна производить больше 8 единиц, то оптимальным для фирмы будет выпуск на пределе своих производственных мощностей.

№3

Пусть Q (t) количество теплоты, которое необходимо для нагревания тела массой 1 кг от 0^0C до температуры t^0 (по Цельсию), известно, что в диапазоне $0^0 <= t <= 95^0$, формула

$$Q(t) = 0{,}396\,t + 2{,}081\cdot10^{-3}\,t^2 - 5{,}024\cdot10^{-7}\,t^3$$

дает хорошее приближение к истинному значению. Найдите, как зависит теплоёмкость воды от t.

$C(t) = Q'(t) = 0{,}396 + 4{,}162\cdot10^{-3}\,t - 15{,}072\cdot10^{-7}\,t^2$

№ 4

Автомобиль приближается к мосту со скоростью 72 км/ч. У моста висит дорожный знак "36км/ч". За 7 сек до въезда на мост, водитель нажал на тормозную педаль. С разрешаемой ли скоростью автомобиль въехал на мост, если тормозной путь определяется формулой $S = (20t - t^2)$ м/с

Мы с Вами живём в эпоху освоения космоса. Привыкли к сообщениям о полёте космических кораблей, о работе космических экипажей, есть даже уже космические туристы. Но всё началось со старта ракеты "Восток", которая вывела космический корабль с Ю.А. Гагариным на орбиту Земли. Сейчас я предлагаю Вам поприсутствовать на стартовой площадке космодрома "Байконур" при запуске ракеты "Восток", где очень хорошо видно как меняется скорость движения ракету при пуске. (Демонстрация видеоклипа).

№ 5

Высота ракеты меняется по закону $S = 100\ln(t^2 + 1)$. Найдите кинетическую энергию ракеты через 10 секунд после старта,если масса ракеты 10 тонн.

№ 6

а)Заряд, протекающий через проводник меняется по закону $q = Sin(2t - 10)$. Найти силу тока в момент времени t =5.

Ответ: сила тока равна 2 А

б)Сила тока в цепи переменного тока изменяется в зависимости от времени по закону $i = 0{,}2\sin\frac{\pi}{60}t$. Найдите скорость изменения силы тока в конце десятой секунды (i - в амперах, t - в секундах).

Ответ: $\approx 0{,}01A/c$

№ 7

Найти скорость реакции в момент времени t = 10сек, если концентрация исходного продукта меняется по закону $C_{исх.} = -50e^{-0,2t}$

№ 8

Царь зовет к себе Стрельца - удалого молодца. И дает ему поручение государственного значения: "Принеси-ка мне Стрелец 20 моль того - сего, сам не знаю я чего! Ночь даю тебе подумать, утром буду ждать доклад! Не смогешь - кого винить? Должен я тебя казнить. Запиши себе заданье, чтоб со страху не забыть". Сколько времени потребуется для получения 20 моль "того - сего, сам не знаю я чего", если концентрация продукта реакции меняется по закону $C_{прод.} = 20e^{6t-0,1t^2}$, Ответ:≈1,35моль/сек

№ 9

Царь зовет к себе Стрельца - удалого молодца

И дает ему поручение государственного значения:

« Принеси-ка мне Стрелец 20 моль того – сего,

сам не знаю я чего!

Ночь даю тебе подумать, утром буду ждать доклад!

Не смогешь – кого винить? Должен я тебя казнить.

Запиши себе заданье, чтоб со страху не забыть».

Сколько времени потребуется для получения 20 моль

« *того - сего, сам не знаю я чего*», если концентрация продукта реакции меняется по закону

$$C_{прод.} = 20 \cdot e^{6t-0,1t^2}$$

Ответ: 30 секунд