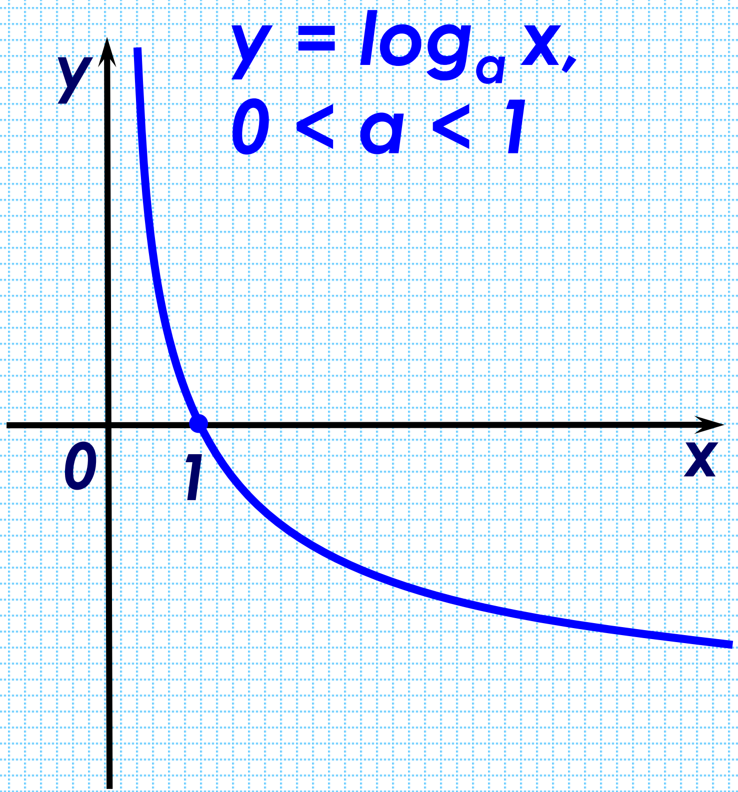
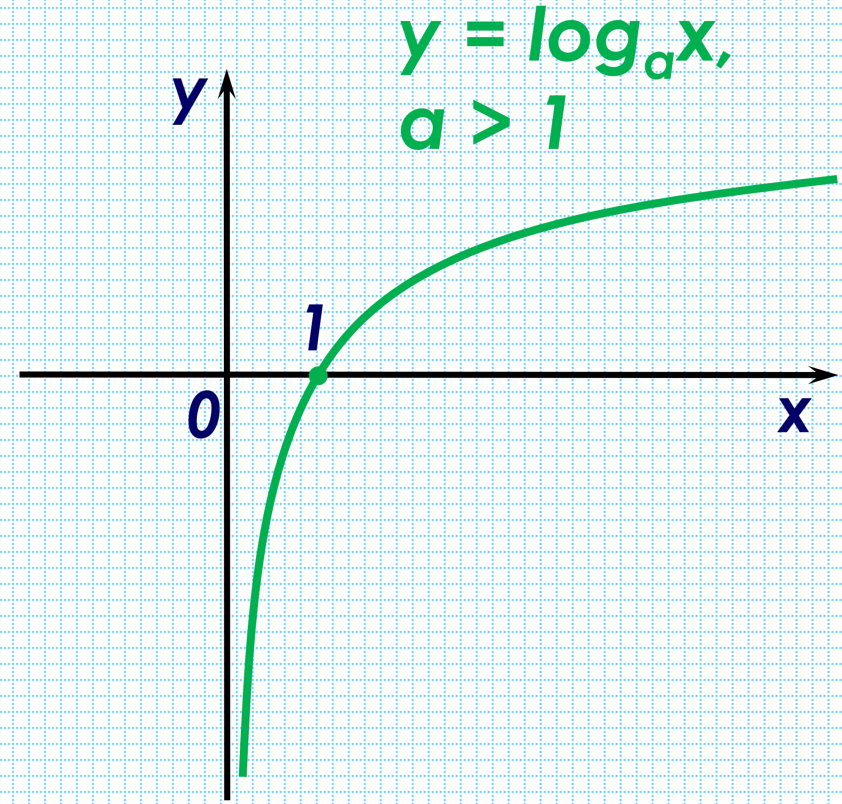
логарифмическая функция, её свойства и график





11 класс

Материалы для обмена опытом по методам решения основных программных задач и требованиям к оформлению записей их решения

учитель: Шишкина И. Ю.

Содержание

Сведения из истории

Потребность в сложных расчётах в XVI веке быстро росла, и значительная часть трудностей была связана с умножением и делением многозначных чисел, а также извлечением корней. В конце века нескольким математикам, почти одновременно, пришла в голову идея: заменить трудоёмкое умножение на простое сложение, сопоставив с помощью специальных таблиц

геометрическую и арифметическую прогрессии, при этом геометрическая будет исходной. Тогда и деление автоматически заменяется на неизмеримо более простое и надёжное вычитание, а извлечение корня степени *n* сводится к делению логарифма подкоренного выражения на *n*. Первым эту идею опубликовал в своей книге «*Arithmetica integra*» *Михаэль Штифель*, который, впрочем, не приложил серьёзных усилий для реализации своей идеи.

Сведения из истории

В 1614 году шотландский математик-любитель *Джон Непер* опубликовал на латинском языке сочинение под названием «*Описание удивительной таблицы логарифмов*». В нём было краткое описание логарифмов и их свойств, а также 8-значные таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов, с шагом 1'. Термин логарифм, предложенный *Непером*, утвердился в науке. Теорию логарифмов Непер изложил в другой своей книге «Построение удивительной таблицы логарифмов», изданной посмертно в 1619 году его сыном.

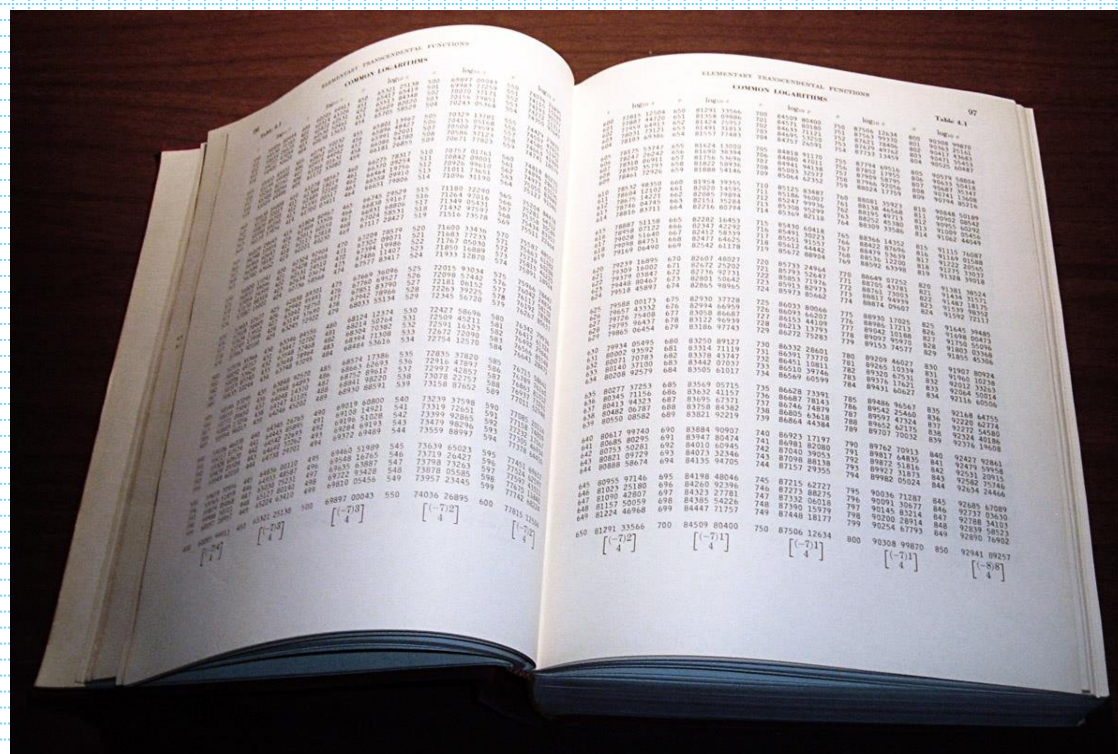
Слово *логарифм* происходит от греческого *λόγοφ* (число) и *αριvμοφ* (отношение) и переводится, следовательно, как отношение чисел.

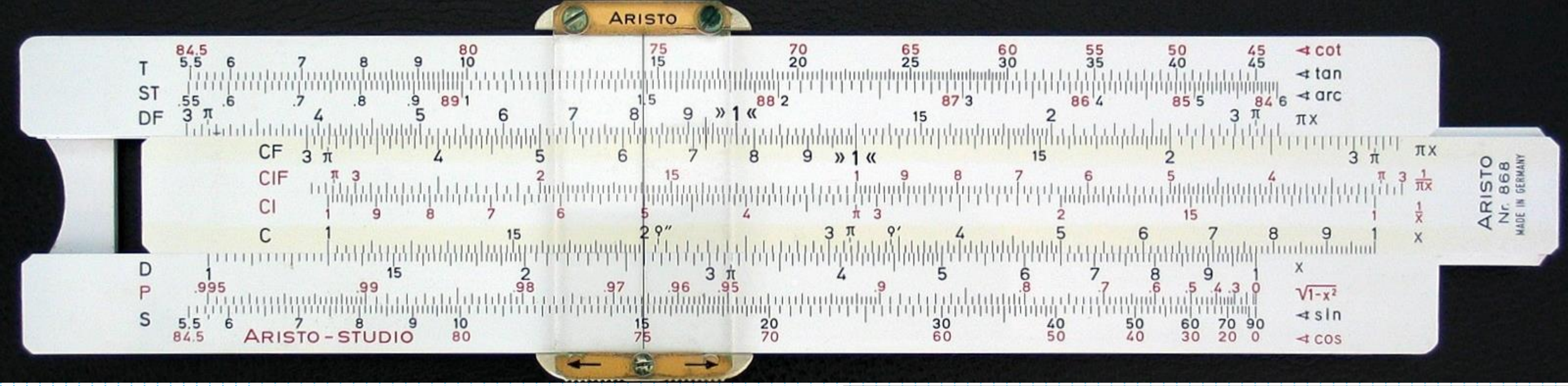
«Логарифм данного синуса есть число, которое арифметически возрастало всегда с той же скоростью, с какой полный синус начал геометрически убывать».

Сведения из истории

Логарифмы необычайно быстро вошли в практику. Изобретатели логарифмов не ограничились разработкой новой теории. Было создано практическое средство – таблицы логарифмов, – резко повысившее производительность труда вычислителей. Добавим, что уже в 1623 г., т. е. всего через 9 лет после издания первых таблиц, английским математиком *Д. Гантером* была изобретена первая логарифмическая линейка, ставшая рабочим инструментом для многих поколений.

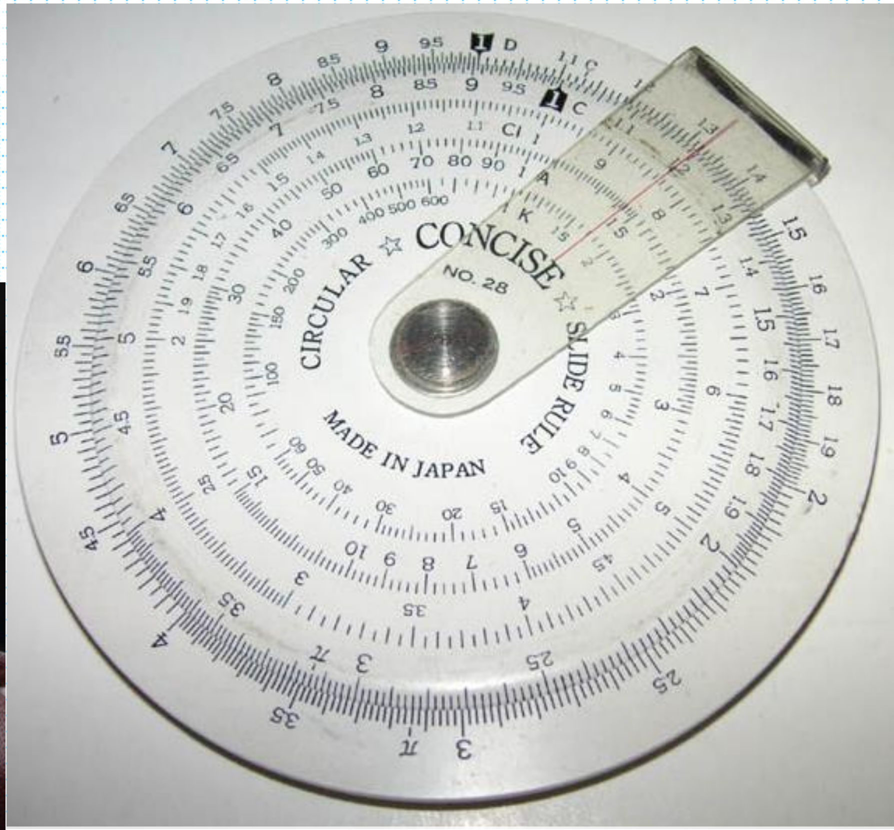
Первые таблицы логарифмов составлены независимо друг от друга шотландским математиком ***Дж. Непером*** (1550 - 1617) и швейцарцем ***И. Бюрги*** (1552 - 1632).





Логарифмическая линейка

Часы Breitling Navitimer



Круговая логарифмическая линейка (логарифмический круг)

Понятие логарифма

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b

$\log_a b = c$, $a^c = b$; $a \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$

$$a^{\log_a b} = b$$

- основное логарифмическое тождество

Примеры

1. $\log_2 8 = 3$, $2^3 = 8$;
2. $\log_3 729 = 6$, $3^6 = 729$;
3. $\log_{0,2} 25 = -2$, $(0,2)^{-2} = 25$;
4. $\log_4 8 = 1,5$, $4^{1,5} = 8$;
5. $\log_2 2 = 1$, $2^1 = 2$;
6. $\log_{10} 1 = 0$, $10^0 = 1$;
7. $\log_{49} 1/7 = -0,5$, $49^{-0,5} = 1/7$;
8. $\log_{0,1} 10000 = -4$, $0,1^{-4} = 10000$.

Основные свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0;$
2. $\log_a a = 1;$
3. $\log_a \frac{1}{a} = -1;$
4. $\log_{a^k} a = \frac{1}{k};$
5. $\log_a a^m = m;$
6. $\log_{a^k} a^m = \frac{m}{k};$
7. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c;$
8. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$
9. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b;$
10. $\log_a b^m = m \log_a b;$
11. $\log_{a^k} b^m = \frac{m}{k} \log_a b;$
12. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$
13. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$
14. $\log_a b \cdot \log_c d =$

    $= \log_c b \cdot \log_a d$
15. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Понятие логарифмической функции

Функцию вида

$y = \log_a x$, где $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$

называют

логарифмической функцией

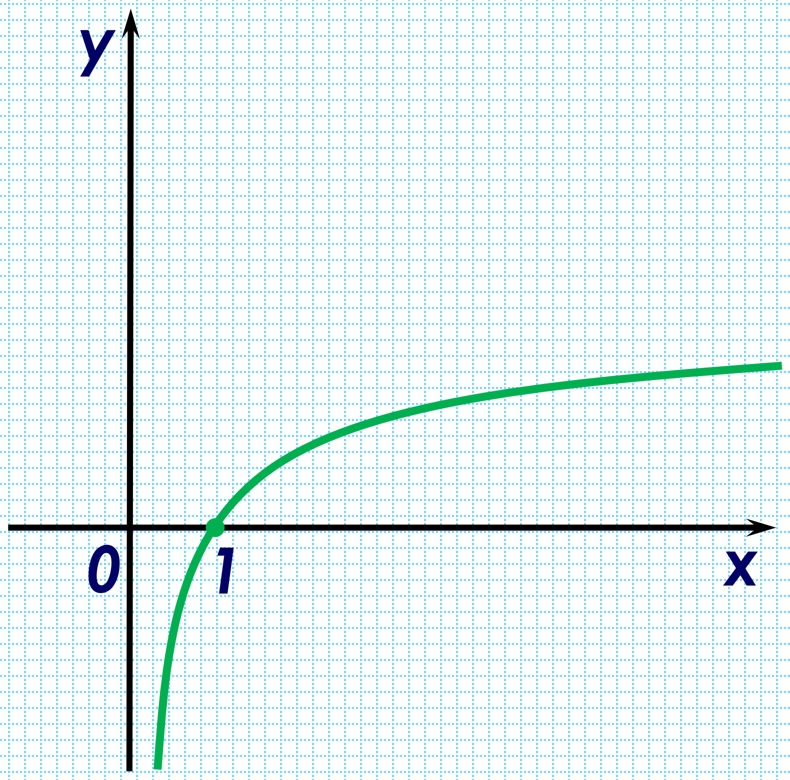
Свойства логарифмической функции $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$

1. $D(y) = (0; +\infty)$,
   $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. а) Нули функции: $y = 0$ при $x = 1$;
   б) точек пересечения с осью ординат нет.
3. а) При $a > 1$ функция возрастает на $(0; +\infty)$;
   б) при $0 < a < 1$ функция убывает на $(0; +\infty)$.
4. Ни четная функция, ни нечетная.
5. Не ограничена сверху, не ограничена снизу.
6. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
7. Непрерывна.
8. а) При $a > 1$ функция выпукла вверх;
   б) при $0 < a < 1$ функция выпукла вниз.
9. Ось y является вертикальной асимптотой графика логарифмической функции.

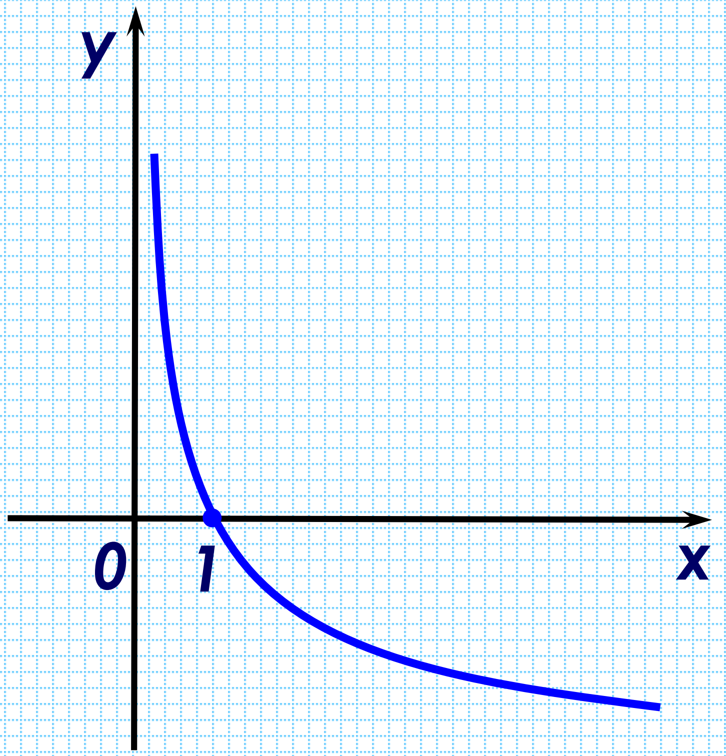
График логарифмической функции

$y = \log_a x,\ a \neq 1,\ a > 0$

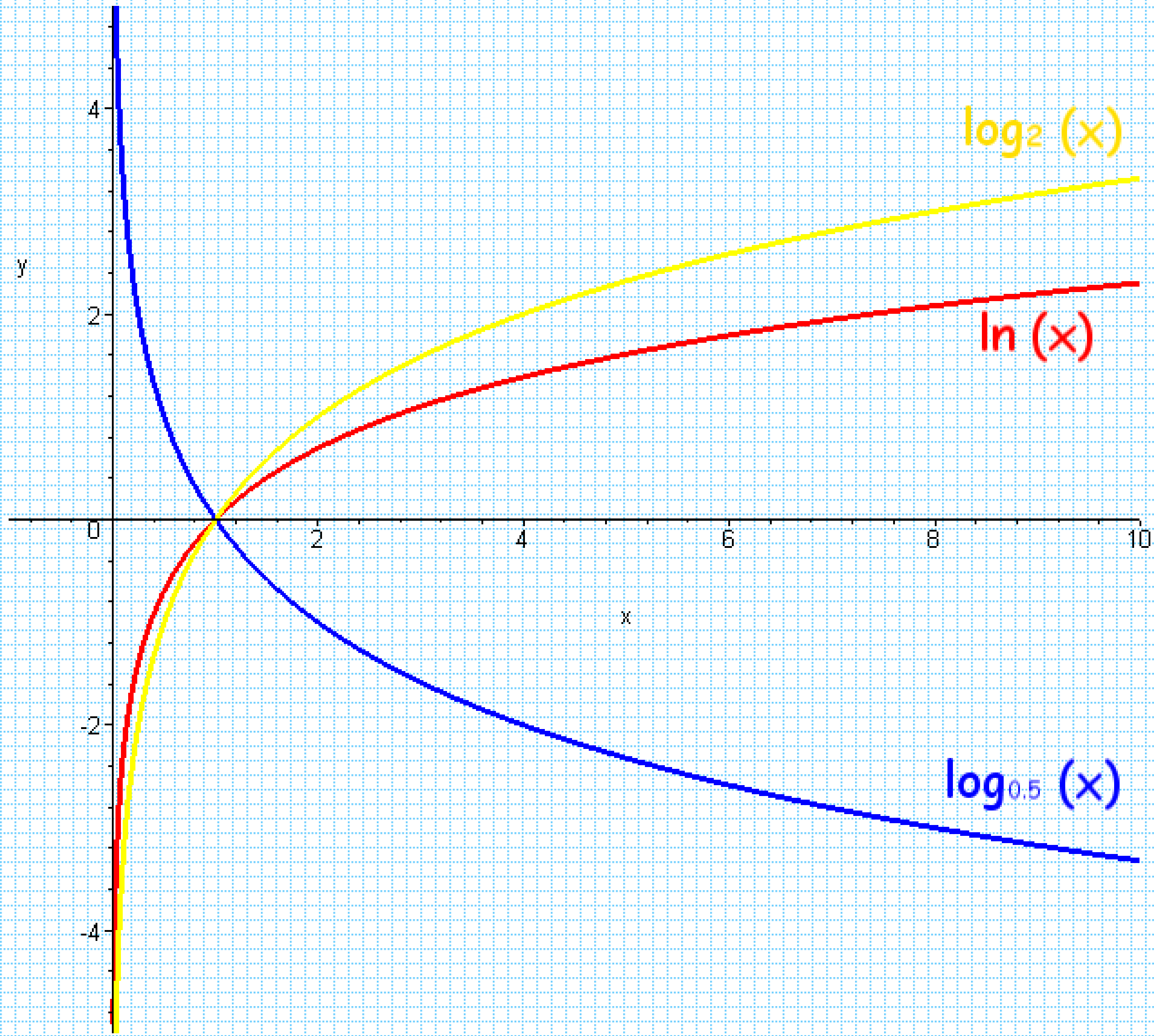
$y = \log_a x,\ a > 1$



$y = \log_a x,\ 0 < a < 1$



Графики логарифмической функции
$y = \log_a x,\ a \neq 1,\ a > 0$



Свойства сравнения логарифмов при $a \neq 1,\ a > 0$

1. *Если* $0 < a < 1$ *и* $0 < x_1 < x_2$, *то* $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

2. *Если* $a > 1$ *и* $0 < x_1 < x_2$, *то* $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

3. *Если* $1 < a < b$ *и* $x > 1$, *то* $\log_a x > \log_b x$.

4. *Если* $0 < a < b < 1$ *и* $x > 1$, *то* $\log_a x > \log_b x$.

5. *Если* $1 < a < b$ *и* $0 < x < 1$, *то* $\log_a x < \log_b x$.

6. *Если* $0 < a < b < 1$ *и* $0 < x < 1$, *то* $\log_a x < \log_b x$.

7. $\log_a b > 0 \Leftrightarrow a > 0,\ b > 0$ *и* $(a - 1)(b - 1) > 0$ *(если положительные числа a и b лежат “по одну сторону от единицы”)*

8. $\log_a b < 0 \Leftrightarrow a > 0,\ b > 0$ *и* $(a - 1)(b - 1) < 0$ *(если положительные числа a и b лежат “по разные стороны от единицы”)*

Логарифмические уравнения

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a h(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **логарифмическими уравнениями**

$$\log_a f(x) = \log_a h(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод потенцирования.
3. Метод введения новой переменной.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 1

$$\log_3\left(x^2-3x-5\right)=\log_3(7-2x)$$

$$\begin{cases} x^2-3x-5=7-2x \\ 7-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-12=0 \\ x<3{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{array}\right. \\ x<3{,}5 \end{cases}$$

$$x=-3$$

Ответ: -3.

Пример 2

$$\log_2(x+4)+\log_2(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\log_2(x+4)(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$\begin{cases} (x+4)(2x+3)=(1-2x) \\ x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+13x+11=0 \\ x>-4 \\ x>-1{,}5 \\ x<0{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-5{,}5 \end{array}\right. \\ -1{,}5<x<0{,}5 \end{cases}$$

Ответ : -1.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 3

$$log_{x+4}\left(x^2-1\right)=log_{x+4}(5-x)$$

$$\begin{cases} x^2-1=5-x, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x-6=0, \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1; \end{array}\right. \\ -4<x<5, \\ x\neq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{array}\right. \\ x\neq -3 \\ \left[\begin{array}{l} -4<x<-1, \\ 1<x<5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2$$

Ответ: 2.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 4

$$lg^2 x + lg\, x + 1 = \frac{7}{lg \frac{x}{10}}$$

$$lg \frac{x}{10} = lg\, x - lg\, 10 = lg\, x - 1,$$

$где \quad x > 0, \quad x \neq 10$

$$lg^2 x + lg\, x + 1 = \frac{7}{lg\, x - 1}$$

$пусть \quad lg\, x = t, \quad где \quad t \neq 1, \quad тогда$

$$t^2 + t + 1 = \frac{7}{t-1}$$

$$(t-1)(t^2 + t + 1) = 7$$

$$t^3 - 1 = 7$$

$$t^3 = 8$$

$$t = 2$$

Вернемсяк исходнойпеременной

$$lg\, x = 2$$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

Ответ: 100.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$log_{0,1x}\, x + log_{0,2x}\, x = 0$$

$$ОДЗ: \begin{cases} 0{,}1x \neq 1, \\ 0{,}2x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 10, \\ x \neq 5, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$log_{0,1x}\, x = \frac{lg\, x}{lg\, 0{,}1x} = \frac{lg\, x}{lg\, 0{,}1 + lg\, x} = \frac{lg\, x}{-1 + lg\, x}$$

$$log_{0,2x}\, x = \frac{lg\, x}{lg\, 0{,}2x} = \frac{lg\, x}{lg\, 0{,}2 + lg\, x} = \frac{lg\, x}{lg\, \frac{1}{5} + lg\, x} = \frac{lg\, x}{-lg\, 5 + lg\, x}$$

$$\frac{lg\, x}{-1 + lg\, x} + \frac{lg\, x}{-lg\, 5 + lg\, x} = 0$$

Пусть $lg\, x = t$, *где* $t \neq 1, t \neq lg 5$ *тогда*

$$\frac{t}{t-1} + \frac{t}{t - lg 5} = 0$$

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\frac{t}{t-1}+\frac{t}{t-lg5}=0 \quad \left|\times(t-1)(t-lg5)\right.$$

$$t(t-lg5)+t(t-1)=0$$

$$t(t-lg5+t-1)=0$$

$$t(2t-lg5-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{lg5+1}{2}=\frac{lg5+lg10}{2}=\frac{lg50}{2}=lg\sqrt{50} \end{array}\right.$$

Вернемсяк исходнойпеременной

$lg\,x=0$ *или* $lg\,x=lg\sqrt{50}$

$x=1$ $x=5\sqrt{2}$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ

Ответ : $1;\ 5\sqrt{2}.$

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 6

$$x^{1-log_5 x} = 0{,}04$$

Т.к. обе части равенства принимают только положительные значения, прологарифмируем их по основанию 5:

$$log_5 x^{1-log_5 x} = log_5 0{,}04$$

$$log_5 0{,}04 = log_5 \frac{1}{25} = log_5 5^{-2} = -2$$

$$(1 - log_5 x) log_5 x = log_5 0{,}04$$

$$ОДЗ: \ x > 0$$

$$log_5 x - log_5^2 x = -2$$

$$пусть \ \ log_5 x = t, \ \ тогда$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{array} \right.$$

Вернемсяк исходнойпеременной

$$\left[\begin{array}{l} log_5 x = 2, \\ log_5 x = -1; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5^2, \\ x = 5^{-1}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25, \\ x = 0{,}2. \end{array} \right.$$

Ответ: 0,2; 25.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 7

$$\log_x\left(3x^{\lg x}+4\right)=2\lg x$$

ОДЗ : $\begin{cases} x\neq 1, \\ x>0; \end{cases}$

По определению логарифма

$$x^{2\lg x}=3x^{\lg x}+4$$

Пусть $x^{\lg x}=t$, *где* $t>0$ *тогда*

$$t^2-3t-4=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1 - \text{не удовлетворяет} \\ t=4 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$x^{\lg x}=4$$

Прологарифмируем обе части по основанию 10 :

$$\lg\left(x^{\lg x}\right)=\lg 4$$

$$\lg x \lg x=\lg 4$$

$$\lg^2 x=\lg 4$$

$$\lg x=\pm\sqrt{\lg 4}$$

$$x=10^{\pm\sqrt{\lg 4}}$$

Ответ: $10^{\pm\sqrt{\lg 4}}$.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 8

Решите систему уравнений : $\begin{cases} lg(2x-y)+1 = lg(y+2x)+lg\,6, \\ 2\log_3(x-y) = \log_3(y+2) \end{cases}$

$$\begin{cases} lg(2x-y)+lg\,10 = lg(y+2x)+lg\,6, \\ \log_3(x-y)^2 = \log_3(y+2); \end{cases}$$

$$ОДЗ: \begin{cases} 2x-y>0, \\ y+2x>0 \\ x-y>0, \\ y+2>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} lg((2x-y)10) = lg((y+2x)6), \\ (x-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y, \\ y^2-y-2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-y)10 = (y+2x)6, \\ (x-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y, \\ \left[\begin{array}{l} y_1=-1, \\ y_2=2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x-10y = 6y+12x, \\ (x-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_1=-1, \\ x_1=-2; \end{cases} - \text{не удовлетворяет ОДЗ} \\ \begin{cases} y_2=2, \\ x_2=4. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x=2y, \\ (2y-y)^2 = y+2; \end{cases}$$

Ответ: $(4;\,2)$.

Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **логарифмическими неравенствами**

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$a > 1$

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$0 < a < 1$

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

или

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

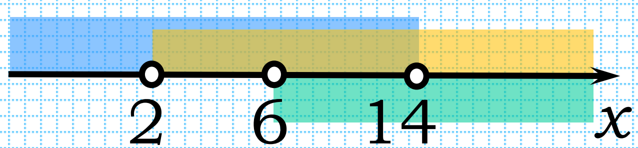
$$\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

$$\text{т.к. } a = 3 > 1, \text{ то}$$

$$\begin{cases} 2x-4 > 14-x, \\ 2x-4 > 0, \\ 14-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(16+4x-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{2}} 16$$

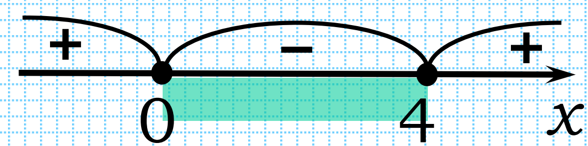
$$\text{т.к. } a = \frac{1}{2} < 1, \text{ то}$$

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 \ge 16, \\ 16+4x-x^2 > 0; - \text{лишнее условие} \end{cases}$$

$$4x - x^2 \ge 0$$

$$x^2 - 4x \le 0$$

$$x(x-4) \le 0$$



Ответ: [0; 4].

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 3

$$lg\,x + lg(45 - x) < 2 + lg2$$

$$lg(x(45 - x)) < lg100 + lg2$$

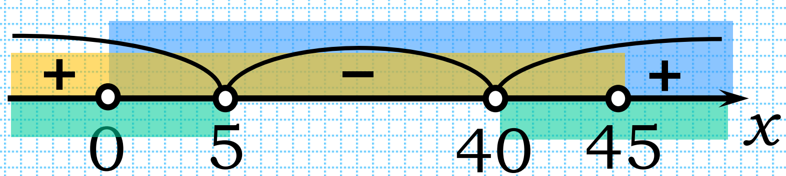
$$lg(45x - x^2) < lg\,200$$

$$т.к.\ \ a = 10 > 1,\ то$$

$$\begin{cases} 45x - x^2 < 200, \\ 45 - x > 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 45x + 200 > 0, \\ x < 45, \\ x > 0; \end{cases} \qquad н.ф.:\ \ x^2 - 45x + 200 = 0$$

$$\left[\begin{aligned} x_1 &= 5, \\ x_2 &= 40; \end{aligned}\right.$$



Ответ: $(0;\ 5) \cup (40;\ 45)$.

Пример 4

$$log_2^2\, x^2 - 5\,log_2\, x + 1 \le 0 \qquad ОДЗ:\ \ x > 0$$

$$(2\,log_2\, x)^2 - 5\,log_2\, x + 1 \le 0$$

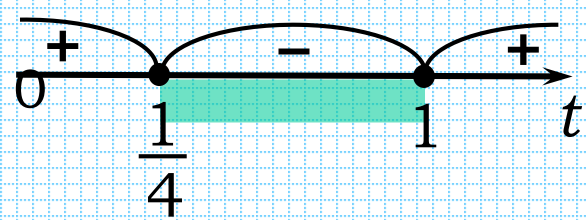
$$4\,log_2^2\, x - 5\,log_2\, x + 1 \le 0$$

$$пусть\ \ log_2\, x = t,\ \ тогда$$

$$4t^2 - 5t + 1 \le 0$$

$$н.ф.:\ \ 4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$\left[\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{4}, \\ t_2 &= 1; \end{aligned}\right.$$



$$\frac{1}{4} \le t \le 1$$

Вернемся к исходной переменной

$$\frac{1}{4} \le log_2\, x \le 1,\ т.к.\ a = 2,\ то$$

$$\sqrt[4]{2} \le x \le 2$$

Ответ: $[\sqrt[4]{2};\ 2]$.

Логарифмические неравенства. Примеры

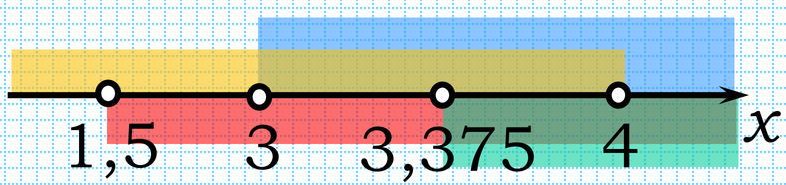
Пример 5

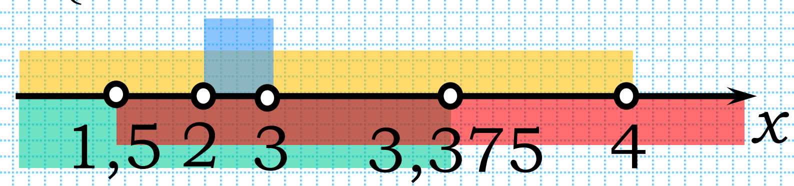
$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$$

Возможныдва случая:

$$1)\ \begin{cases} x-2>1, \\ 2x-3>24-6x, \\ 2x-3>0, \\ 24-6x>0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 0<x-2<1, \\ 2x-3<24-6x, \\ 2x-3>0, \\ 24-6x>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3, \\ x>\dfrac{27}{8}, \\ x>1{,}5, \\ x<4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2<x<3, \\ x<\dfrac{27}{8}, \\ x>1{,}5, \\ x<4; \end{cases}$$





$x \in (3{,}375;\ 4)$ $\qquad$ $x \in (2;\ 3)$

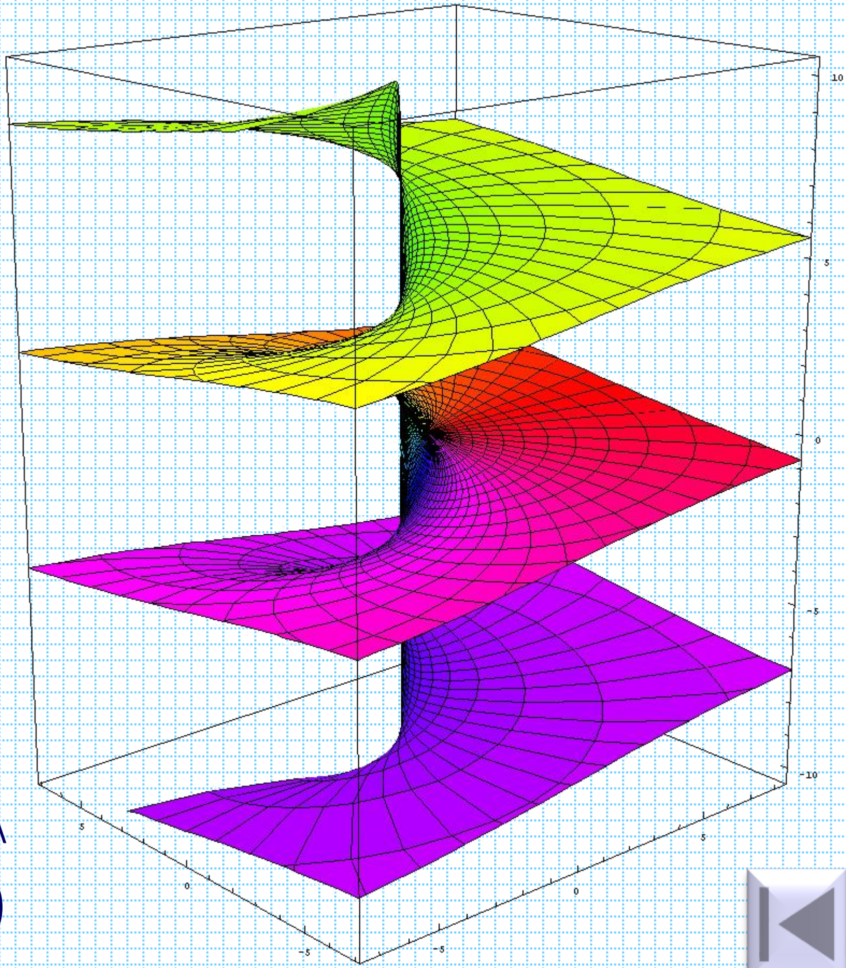
Ответ: $(2;\ 3)\cup(3{,}375;\ 4)$.

Используемые материалы

1. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2008

2. *http://ru.wikipedia.org/wiki - логарифмические линейки*

3. *http://ru.wikipedia.org/wiki - логарифм*



Комплексный логарифм

(мнимая часть)